光通信理論の量子論的基礎
-量子状態制御-

広田　修（玉川大）

1. まえがき

近年，光通信技術は著しい発展を遂げつつあるが，その基本的な成果は光源，光通信路，光検出器の超小型化及び超高性能化にある。特に半導体レーザ，光ファイバ，光ダイオードの性能はほぼ理論限界に近いものが作製されるようになっており，これらを用いた光通信システムもまた従来の古典的通信理論の適用範囲内での限界に近い性能が実現されつつある[1)-3)]。

光通信は古典的な現象に加えて量子現象が顕著になるため，古典的通信理論の適用には限界があることが知られている。そこで新しく 1967 年以来量子通信理論の開発が進められ，現在，大枠の体系化が完成しつつある[4)-6)]。この理論の発展に伴う最大の成果は古典論では予測できなかった特性が実現可能である事を示したことにある。それは光の量子雑音の特性を支配する量子状態を制御することによって究極の光通信システムを構成しようとするものである。これまで MIT のグループと我々のグループによって種々の分析及び理論の構築が試みられて来た[7),8)]。量子状態制御の理論は今日ようやく一つの体系に集約されようとしている。しかしながら最も基本的な数学的基礎に統一性がなく，量子通信理論に適した体系化が必要不可欠である。本稿では Lie 代数を用いて，量子状態制御理論の統一化と量子通信理論との整合性を与える一つの試みを示すことにする。

2 最小不確定状態と Squeezed 状態

2.1 最小不確定状態の生成

2つの非可換量に対する一般的な最小不確定状態を求める事は容易ではない。しかし真空状態を基礎状態とし，対象としている Lie 代数のユニタリー作用素によって生成される一般化コヒーレント状態は応用上有用である。これまで良く知られている最小不確定状態は $H-W$ 群をなす (p, q) に対するあるいは (a_1, a_2) に対する Glauber コヒーレント状態である。

ここで，コヒーレント状態の同値類を与える $SU(1, 1)$ に対する一般化コヒーレント状態について議論する。

（i） $SU(1, 1)$ の一般化コヒーレント状態と最小不確定状態

前節より，$SU(1, 1)$ に対応するユニタリー作用素は

$$T^k(g_n)=\exp\{\zeta K_+-\zeta^* K_-\}$$

ここで基礎状態 $|\phi_0>$ の選定が重要な問題となる。すなわち $|\phi_0>$ の選定によって一般化コヒーレント状態は最小不確定か否かが決まる。この議論は省略するが，$SU(1, 1)$ の場合，基礎状態として K_0 の固有状態が選定される。

$$K_0|\phi_m>=m|\phi_m>,\quad m=k+n$$

ただし n は正の整数，k は Casimir 作用素によって決まる定数である。作用素 K_1, K_2 に対し，$T^k(g_n)|\phi_m>$ が $M.U.S$ となるためには $m=k$, $n=0$, すなわち $|\phi_m>=|\phi_k>$

$$K_0|\phi_k>=k|\phi_k>$$

の $|\phi_k>$ を基礎状態とすれば良いことが知られている。(ただし Casimir 作用素が最小不確定)

(ii) 光の複素振幅の Squeezed 状態

光の複素振幅は $a=a_1+ia_2$ と表わされる。これの最小不確定状態の同値類を理想 Squeezed 状態と定義する。すなわち，

$$\begin{cases} \Delta a_1^2 \cdot \Delta a_2^2 = \dfrac{1}{16} \\ \Delta a_1/\Delta a_2 = \gamma \end{cases}$$

これは一般に $a_1+i\gamma a_2$ の固有状態として求めうる。

$$(a_1+i\gamma a_2)|MUS\rangle = \beta|MUS\rangle$$

この理想 Squeezed 状態は Stoler, Yuen らによって明確な固有値方程式の解として求められた。

$$(\mu a+\nu a^+)|\alpha : \mu,\ \nu\rangle = \beta|\alpha : \mu,\ \nu\rangle$$

ただし，$|\mu|^2-|\nu|^2=1$ これより，理想 Squeezed 状態は $SU(1,1)$ 理論と密接な関連がある事がわかる。

最近，Wodkiewicz-Eberly は $SU(1,\ 1)$ と理想 Squeezed 状態の関係を議論した[11]。しかし彼らの議論は局所的で見通しがあまり良くない。我々は Wodkiewicz らの理論を一つの公式化に集約できることを示す。

補題．$SU(1,\ 1)$ のユニタリー作用素によって生成される一般化コヒーレント状態は必ずしも理想 Squeezed 状態を与えない。

定理 2.1 $|GC\rangle = T^k(g_n)|\phi_k\rangle$ が理想 Squeezed 状態となるためには

$$\begin{cases} |\phi_k\rangle = |0\rangle \\ T^k(g_n)aT^{k+}(g_n) = \mu a+\nu a^+ \end{cases}$$

の関係が満される事である。

証明

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$aD(\alpha)|0\rangle = \alpha D(\alpha)|0\rangle$$

$$T^k(g_n)aT^{k+}(g_n)T^k(g_n)D(\alpha)|0\rangle = \alpha T^k(g_n)D(\alpha)|0\rangle$$

$$(T^k(g_n)aT^{k+}(g_n))T^k(g_n)D(\alpha)|0\rangle = \alpha T^k(g_n)D(\alpha)|0\rangle$$

$$(T^k(g_n)aT^{k+}))|\widetilde{GC}\rangle = \alpha|\widetilde{GC}\rangle$$

ただし

$$|\widetilde{GC}\rangle \equiv T^k(g_n)D(\alpha)|0\rangle$$

ここで，$|GC\rangle$ が理想 Squeezed 状態となるためには

$$T^k(g_n)aT^{k+}(g_n) = \mu a+\nu a^+$$

ただし，$|\mu|^2-|\nu|^2=1$

ここで，上式が満足されるなら，

$$T^k(g_n)|0\rangle = |0 : \mu,\ \nu\rangle$$

$$D(\alpha)T^k(g_n)|0 = |\alpha : \mu,\ \nu\rangle$$

となる。以上より，$|\phi_k\rangle = |0\rangle$ の $SU(1,1)$ の一般化 Coherent 状態は理想 Squeezed 状態となる。

例．今，Lie 代数 $(SU(1,\ 1))$ の要素を

$$\begin{cases} K_+ = \dfrac{1}{2}a^{+2}, \quad K_- = \dfrac{1}{2}a^2 \\ K_0 = \dfrac{1}{4}(aa^+ + aa^+) \end{cases}$$

とする。この時，基礎状態は

$$K_0|\phi_k\rangle = k|\phi_k\rangle,\quad k=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}(aa^+ + a^+a)|\phi_k\rangle = k|\phi_k\rangle$$

$$\frac{1}{4}aa^+|\phi_k\rangle + \frac{1}{4}a^+a|\phi_k\rangle = \frac{1}{4}|\phi_k\rangle$$

この解は $|\phi_k\rangle = |0\rangle$ の時得られる。すなわち，

$$\frac{1}{4}aa^+|0\rangle + \frac{1}{4}a^+a|0\rangle = \frac{1}{4}|0\rangle$$

なぜなら，$aa^+|0\rangle = |0\rangle$，$a^+a|0\rangle = 0$

一方，ユニタリー作用素は

$$T^k(g_n) = \exp\left\{\frac{z}{2}\ (a^2-a^{+2})\right\}$$

$$T^k(g_n)aT^{k+}(g_n) = \mu a+\nu a^+$$

ただし，$\mu=\cosh z$，$\nu=\sin hz$ である。

ここで注記すべき点は Lie 代数を用いた量子状態の理論では，Lie 代数の生成元のコンビネーションとして表現されるハミルトニアンと Lie 代数のユニタリー表現が一意的関係をもつため物理的対応を明らかにすることが比較的容易となりうるという利点をもつ。

3. 真空状態の任意の制御

前節で述べたように最も重要な量子状態制御作用素の基礎は真空状態となる。従って全ての作用素を真空状態を“基本状態”として構成する体系が好ましいものと考えられる。ここで量子通信への応用のため Heizenberg-Weyl 群に限定する。

真空状態の制御の対象としてのパラメータは真空ゆらぎのバランスとコヒーレント成分である。コヒーレント成分の制御は Glauber のシフト作用素が対応する。

$D(\alpha)=\exp\{\alpha a^{+}-\alpha^{*}a\}$

また真空ゆらぎのバランスは前節のスクイズド作用素

$$T^{k}(g_n)\equiv S(z)=\exp\left\{\frac{z}{2}(a^{2}-a^{+2})\right\}$$

によって制御される。これらの $D(\alpha)$ と $S(z)$ は量子通信に対して重要な理論的基礎を与える。しかしこれらは非可換なため真空状態の制御にあたってその作用の順序が重要な意味をもつ。すなわち，

(a) $D(\alpha)S(z)|0\rangle=|\alpha:\mu,\ \nu\rangle$

(b) $S(z)D(\alpha)|0\rangle=|\tilde{\alpha}:\mu,\ \nu\rangle$

ただし，$\begin{cases}\tilde{\alpha}=\mu\alpha-\nu\alpha^{*}\\ \mu=\cosh z,\ \nu=\sinh z\end{cases}$

ここで後者はコヒーレント状態をスクィズド状態に変換する過程を意味し，パラメトリック増幅過程などの明確な物理的対応が存在する。しかし，前者は真空スクィズド状態にコヒーレント成分(古典的信号)を量子ゆらぎを変化させず注入しようとするものであり，現実にこの2つの作用に時間差があればその実現の方法は明らかではない。しかし発光過程で“同時”に2つの作用を作り出す物理的方法が Knight によって明らかにされた[12)]。2つの独立な作用として前者を作り出す研究は応用上極めて重要である。

次に $S(z')$ と $S(z)$ の連続作用に関する特性は Schumaker，と我々によって解析されている[13),14)]。z と z' が等しい場合

$S(z+z')=S(z)+S(z')$

それ以外は上式は成立せず極めて複雑となる。

次に重要な制御は回転である。従来の回転作用素は

$R(\theta)=\exp\{i\theta a^{+}a\}$

この作用素は2次元位相空間上の座標回転を与える。すなわち

$$\begin{cases}R(\theta)|\alpha\rangle=|\alpha e^{i\theta}\rangle\\ R(\theta)|\alpha:\mu,\ \nu\rangle=|\alpha e^{i\theta}:\mu,\ \nu\rangle\end{cases}$$

この作用素は複素振幅成分に対して実質的に変化を与えない。換言すれば量子状態のコヒーレント成分と量子ゆらぎの相関を保存するので観測者にとってその性質は不変である。コヒーレント成分と量子ゆらぎの相関は物理学上極めて重要な意味をもつ。量子状態生成過程においてはこの2つの間には相関をもつ必要はない。すなわち Caves のスクィズド状態の定義

$D(\alpha)S(z)|0\rangle=|\alpha:\mu,\ \nu\rangle$

はこの事実を反映するものである。しかし，一度生成された量子状態では一般に相関は完全に存在すると言われている。しかし，作用素代数的には無相関として扱う事が可能である。ここで次の作用素を定義しよう。

定義 3.1 次の作用素を一般化シフト作用素とする。

$D_{\theta}(\alpha_{\theta})=\exp\{\alpha_{\theta}a^{+}-\alpha_{\theta}^{*}a\}\cdot\exp[-i\{I_m\alpha_{\theta}\alpha\}]$

$\alpha_{\theta}=\alpha e^{i\phi}-\alpha$

この作用素は次のように作用する。

$D_{\theta}(\alpha_{\theta})|\alpha\rangle=|\alpha e^{i\phi}\rangle$

$D_{\theta}(\alpha_{\theta})|\alpha:\mu,\ \nu\rangle=|\alpha e^{i\phi}:\mu,\ \nu\rangle$

これは量子ゆらぎと独立にコヒーレント成分を入れ替えることに等価である。さらに上記作用素の概念を拡張することが可能である。

定義 3.2 複素数 $\{\alpha_{(1)}\}$ をコヒーレント成分とする量子状態の集合を $H_{(1)}$ とする。$H_{(1)}$ とは独立な量子状態でコヒーレント成分 $\{\alpha_{(2)}\}$ をもつ集合を $H_{(2)}$ とする。

定義 3.3 $H_{(1)}$ から $H_{(2)}$ への写像で次の性質をもつものを置換写像とする。

$\tilde{U}(\phi)|\alpha_{(1)}\rangle_{(1)}=|\alpha_{(1)}e^{i\phi}\rangle_{(2)}$

ただし　$|\alpha\rangle_{(1)}\in H_{(1)},\ |\alpha\rangle_{(2)}\in H_{(2)}$

ここで上記定義の $\tilde{U}(\phi)$ の具体的構造は明らかではない。もし上記写像が存在するなら量子状態のコヒーレント成分を別の系の量子状態のコヒーレント成分に転写できることになる。この時，量子ゆらぎの特性がどのように転写されるかは $\tilde{U}(\phi)$ の具体的な構造に依存する。

上に述べた作用素及び写像が物理現象として実現可能か否かは量子力学の基本問題に深く関係する。また同時に量子通信が究極の通信を提供しうるか否かにも関係してくる。

次に上記の準備のもとに我々が望む新しい作用を定義する。

定義 3.4　系 (1) の複素数の集合を $\{\alpha_{(1)}\}$ とする。系 (2) の複素数の集合で $\alpha_{(1)}e^{i\phi}$: ϕ は実数：の集合を $\{\alpha_{(2)}\}$ とする。ここで次の写像を定義する。

$$u(\phi)\{\alpha_{(1)}\}=\{\alpha_{(1)}e^{i\phi}\}$$

これを選択置換写像と呼ぶ。

定義 3.5　$\{\alpha_{(1)}\}$ をコヒーレント成分にもつ量子状態に対し

$$\hat{U}_G(\phi)\{|\alpha_{(1)}>\}=|\alpha_{(1)}e^{i\phi}>\}$$

となる写像 $\hat{U}_G(\phi)$ を選択置換量子状態変換と呼ぶ。

ここで定義した $\hat{U}_G(\phi)$ は考察下の Hilbert 空間のみを定義域とすれば定義 3.1 の $D_G(\alpha_G)$ に一致し，この作用の例は図1のようになる。さらに一般的なケースに関しては，今後の課題である。

次にスクイズド作用素の変形を議論する.

定義 3.6　振幅クリップスクイズド作用素を次のように定義する

$$S_G = D(\alpha_G)\ S(Z)$$

ただし、$\alpha_G = |\alpha| - (\mu - \nu)|\alpha|$

上記定義は、X_c成分に対するスクイジングに対してのみの特別な場合を示している．ここで新しく定義した作用素の作用の例を図２に示す．この作用素は振幅を固定してスクイジングを行なう役割を果たす．

この作用は受信されたコヒーレント状態のコヒーレント成分を固定し、雑音成分をスクイズドする．

すでにスクイズド状態にある光を逆方向にスクイズドするにはスクイズド方向を決めるパラメータを送転した作用素をもう一度作用させる．すなわち、最初のスクイズドが$(\mu_1+\nu_1)$であれば$(\mu_2-\nu_2)$を作用させる．

この時、量子雑音がスクイズドされると同時に振幅もスクイズドされるので振幅成分の再注入が必要であり、この作用も数学的には、前と同様に定義できる．

この様子は図３のようになる．

以上、真空状態に対する制御作用素の一般的議論を示した．

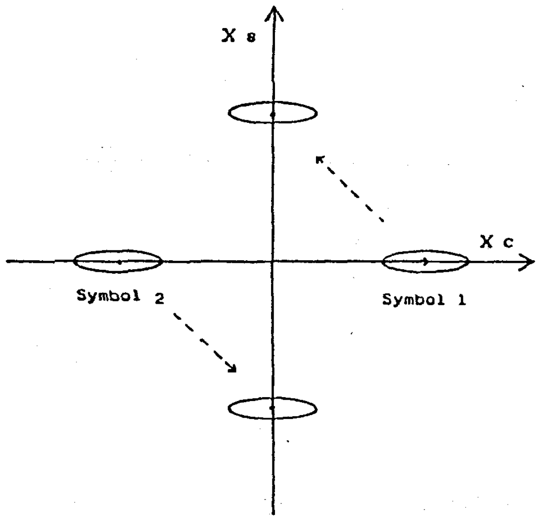

図 1　Operation of generalized phase shift operator.

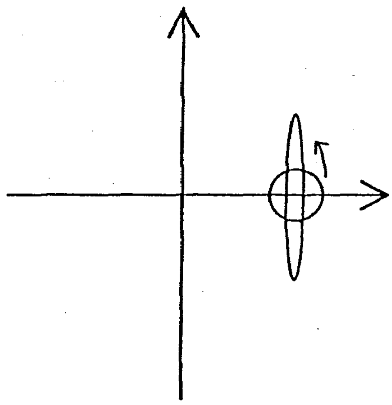

図2. Operation of Amplitude clip squeezed operator.

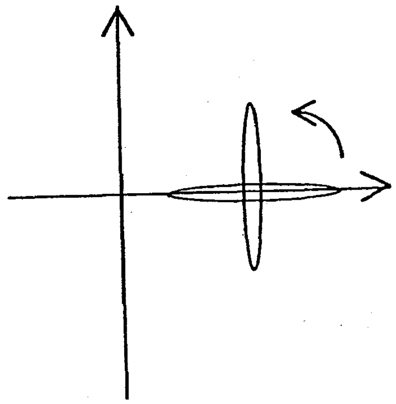

図３. Operation of Amplitude clip double squeezed operator.

むすび

本稿で量子状態制御の数学的な体化系を試みた。特に，制御作用素は真空状態を基本状態とし，その真空状態の制御によって量子通信に有益な特性を導き出す理論化が適切であることが明らかにされた。

真空状態の基本状態としての必要十分性は Lie 代数の応用によって示され，また量子通信への応用を目的として真空状態の新しい制御作用素が提案されている。

今後，新しく提案された作用素の物理的対応を見い出す問題が重要となろう。
また、量子測定過程における制御も重要な課題である。（文献15）

謝辞
御助言を頂いた豊田先生に御礼申し上げます。

文　　献

1) 末松・伊賀，光ファイバ通信入門，オーム社，1989.
2) 広田，光通信入門，啓学出版，1982.
3) 光通信理論研究会編，光通信理論とその応用，森北出版，1988. 大矢，広田，他.
4) C.W. Helstrom, Quantum detection and estimation theory, Academic Press, 1976.
5) A. Holevo, Probabilistic and statistical aspect of quantum theory, North-Holland, 1982.
6) 広田，光通信理論，森北出版，1985.
7) H.P. Yuen, Two-photon coherent states of radiation fields Phys. Rev. A13, pp. 2226–2241, 1976.
8) O. Hirota and H. Tsushima, Quantum communication theory and its Applications, Trans. IEICE of JAPAN, E72, pp. 460–470, 1989.
9) A.W. Knapp, Representation theory of semi simple group, Princeton Univ. Press, 1986.
10) A. Perelomov, Generalized Coherent State, Springer, 1986.
11) K. Wodkiewicz, Coherent State, Squeezed fluctuations and SU (2), SU (1, 1) group in quantum optics, J. Opt. Soc. Am., B, 2, pp. 458–471, 1985.
12) F. de Oliveira and P.L. Knight, Bright Squeezing, Phys. Rev. Lett., 61, 7, pp. 830–833, 1988.
13) B.L. Schumaker, Quantum mechanical pure states with Gaussian wave functions, Phys. Reports, 135, 6, pp. 317–408, 1986.
14) 児矢野，広田，坂庭，スクィーズド状態の主軸回転. 信学会，光量エレ研資，OQE 89-7, 1989.
15)小嶋,instrumentの概念と無限自由度量子系
基研　モレキュール型研究会［進化の力学］1989.